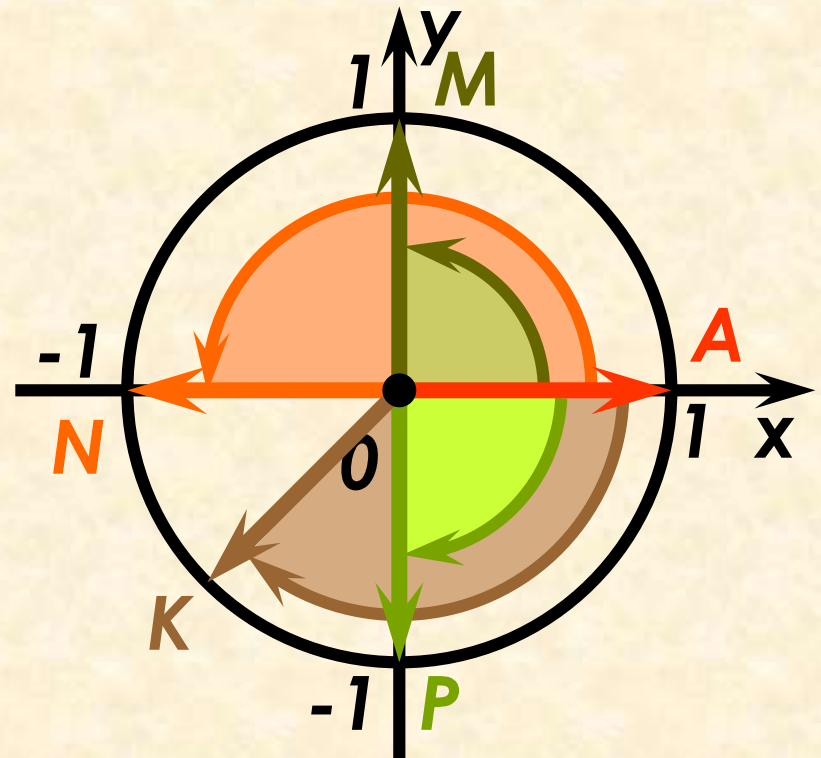
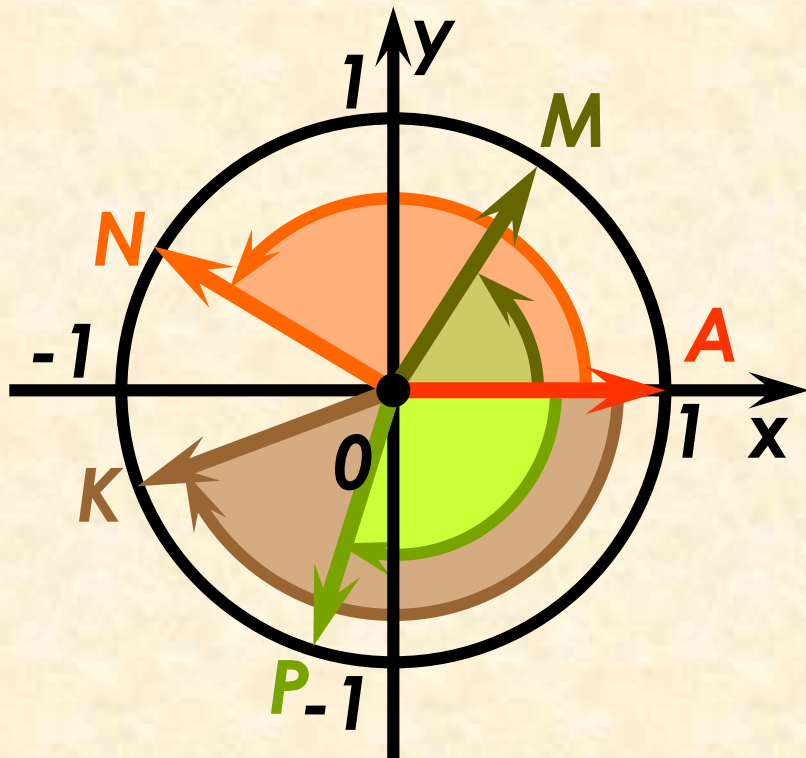


Тригонометрия



Содержание



Единичная окружность



Определение синуса и косинуса угла



Тригонометрические тождества



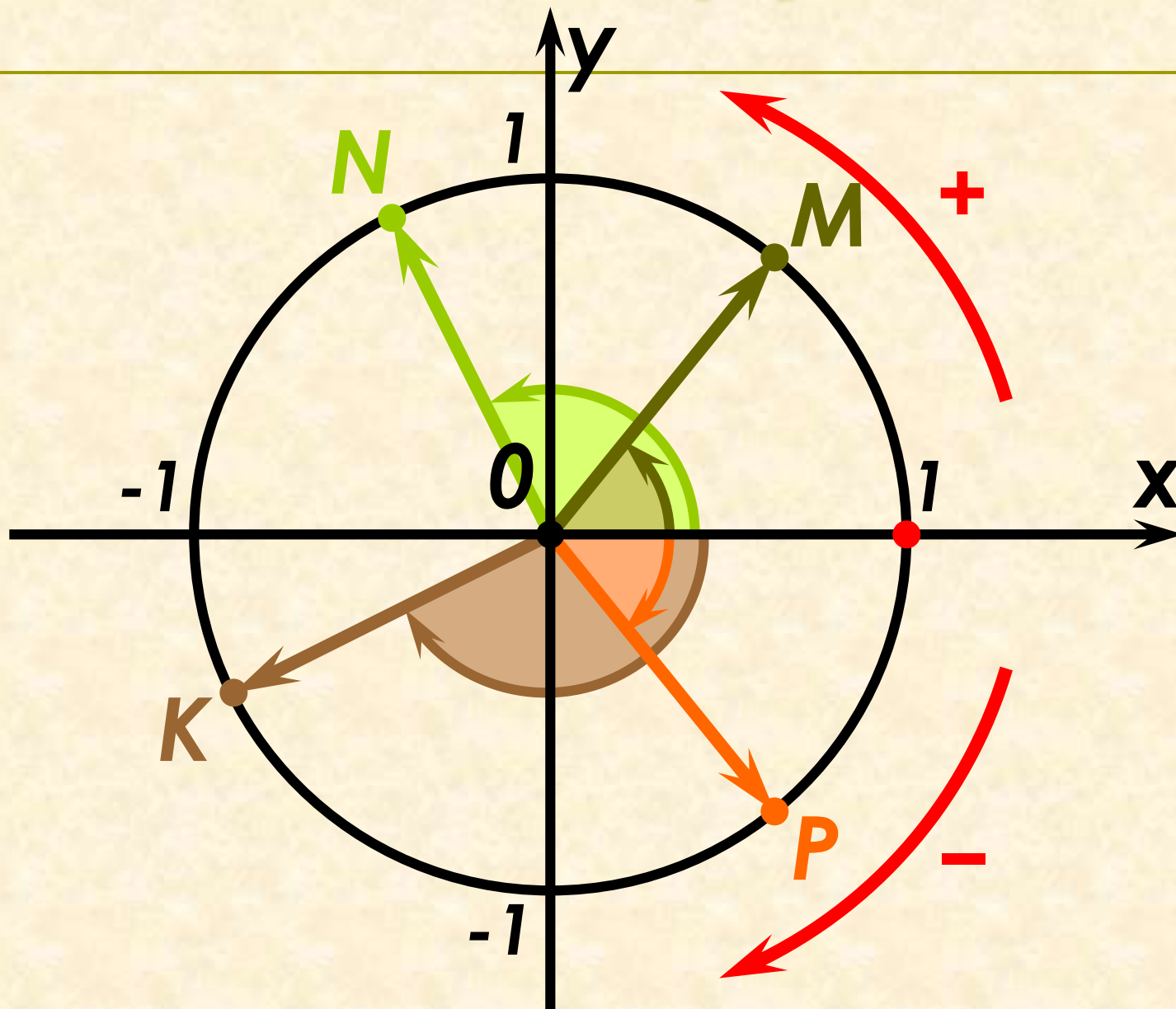
Тригонометрические формулы

Единичная окружность

- Единичная окружность
- Откладывание произвольных углов
- Полный оборот
- Радианная мера угла
- Перевод градусной меры в радианную
- Перевод радианной меры в градусную



Едини́чная о́кружность



Откладывание углов

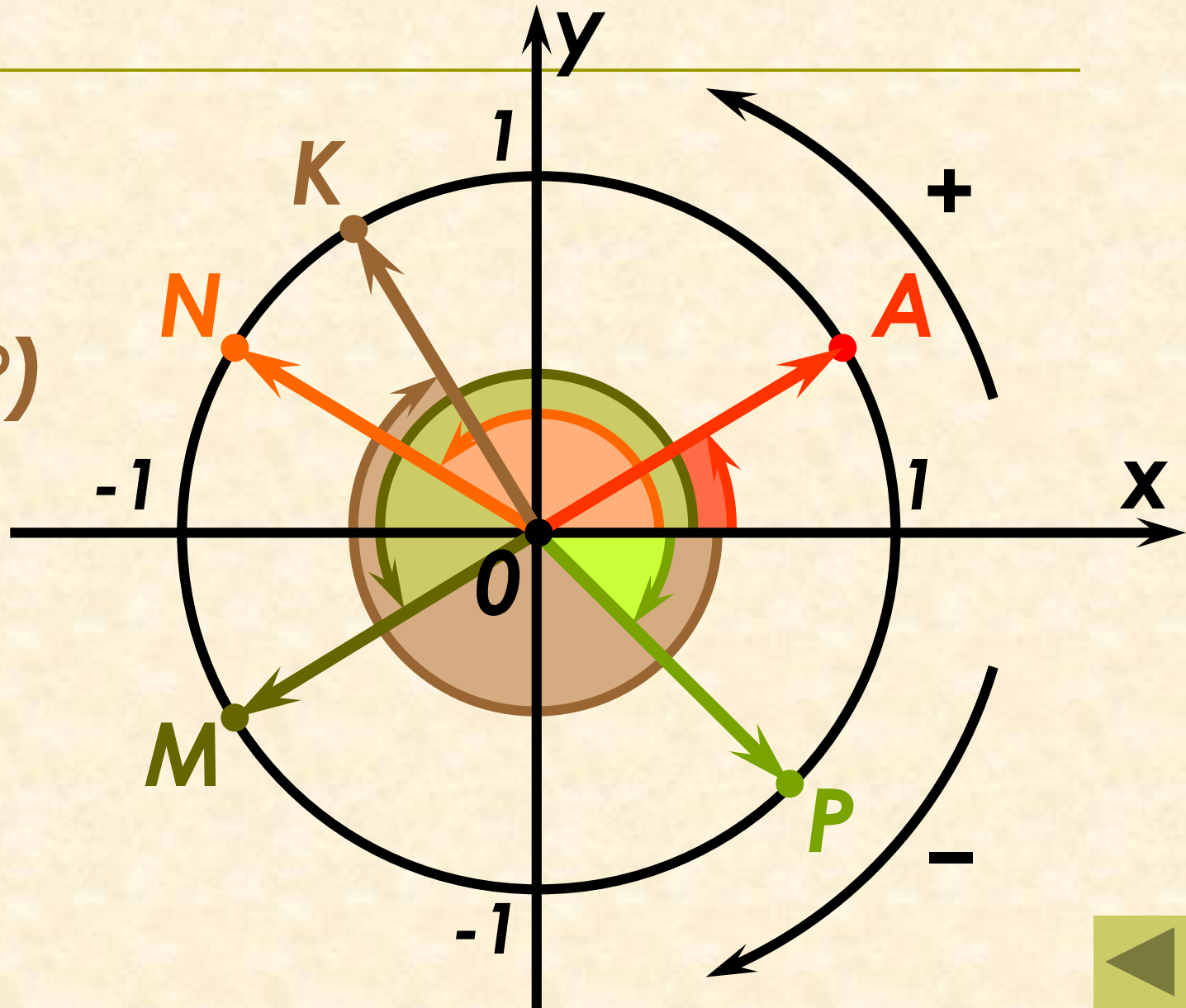
A (30°)

K (-240°)

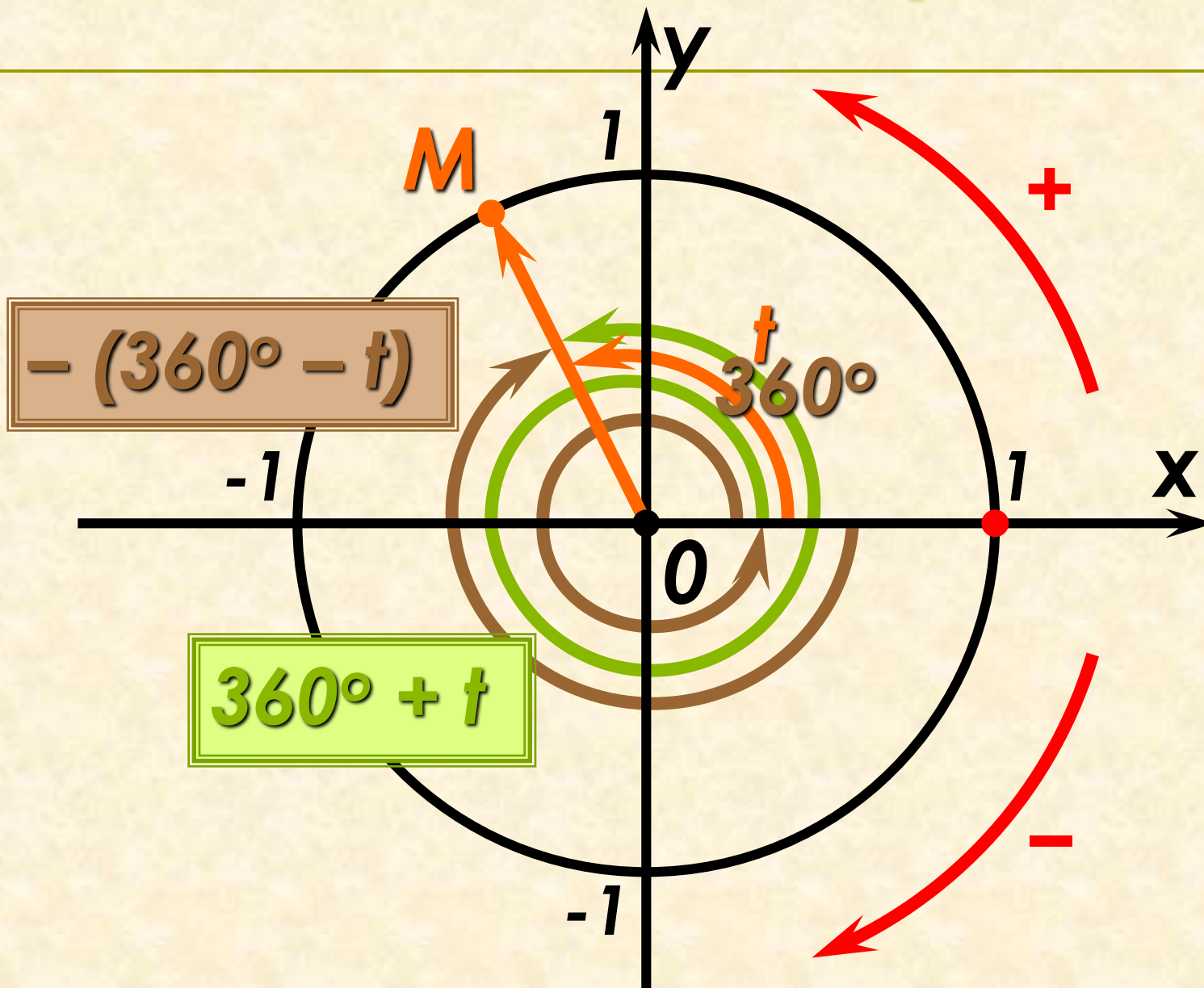
N (150°)

P (-45°)

M (210°)

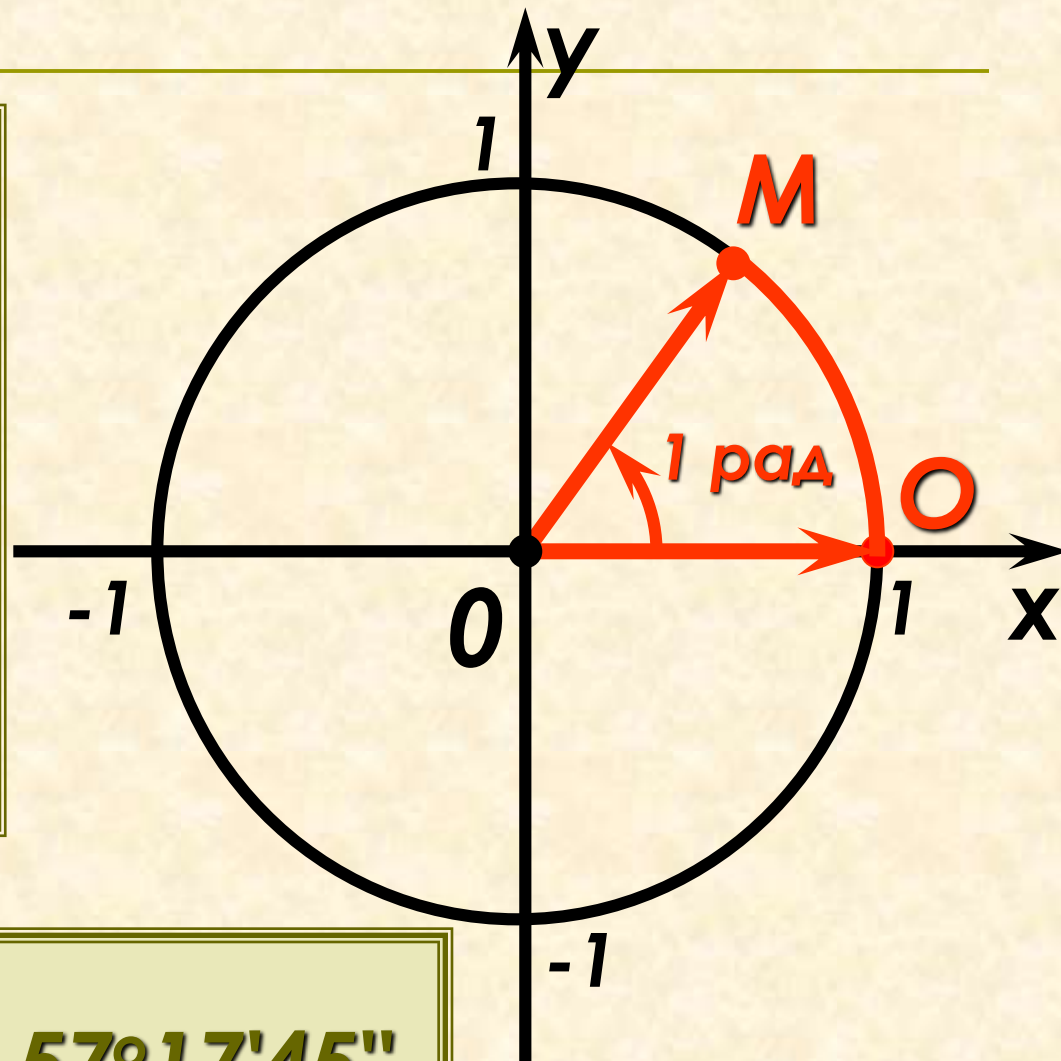


Полный оборот



Радийная мера угла

1 радиан –
это величина
центрального
угла
окружности
радиуса R ,
опирающегося
на дугу
длины R .



$$1 \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$$

Перевод градусной меры в радианную

$$t^{\circ} = t^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}} \text{ рад}$$

$$30^{\circ} = 30^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{6} \text{ рад}$$

$$120^{\circ} = 120^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{2\pi}{3} \text{ рад}$$

$$-75^{\circ} = -75^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}} = -\frac{5\pi}{12} \text{ рад}$$



Перевод радианной меры в градусную

$$t \text{ рад} = t \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ рад} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$$

$$\frac{3\pi}{4} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 135^\circ$$

$$-\frac{2\pi}{9} \text{ рад} = -\frac{2\pi}{9} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -40^\circ$$



Определение синуса и косинуса

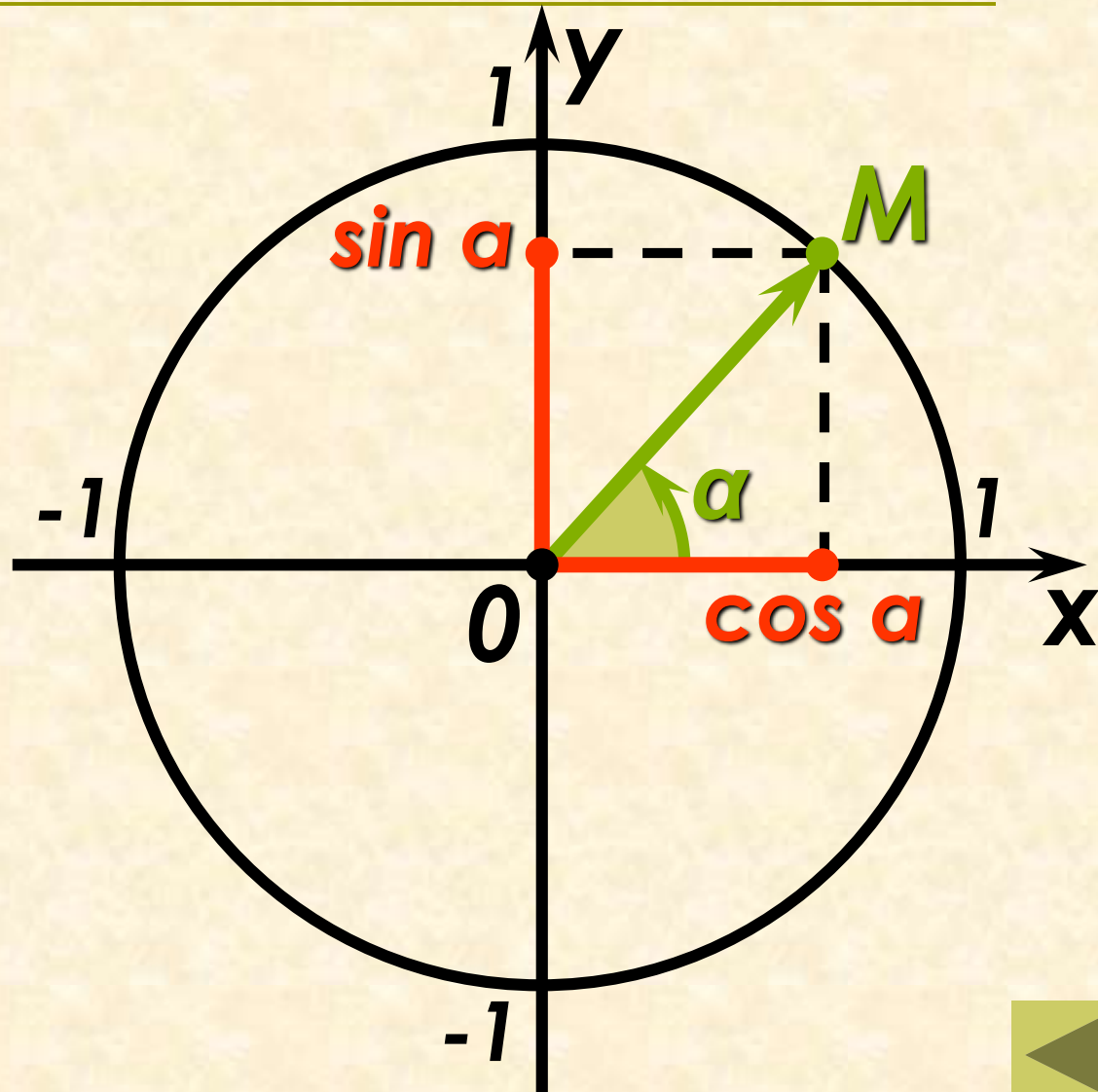
- Определение синуса и косинуса
- Определение тангенса и котангенса
- Знаки синуса и косинуса,
- Знаки тангенса и котангенса
- Расположение табличных углов на единичной окружности
- Расположение углов с шагом 30° на единичной окружности
- Расположение углов с шагом 45° на единичной окружности
- Свойства четности и нечетности
- Таблица значений тригонометрических функций



Определение синуса и косинуса угла

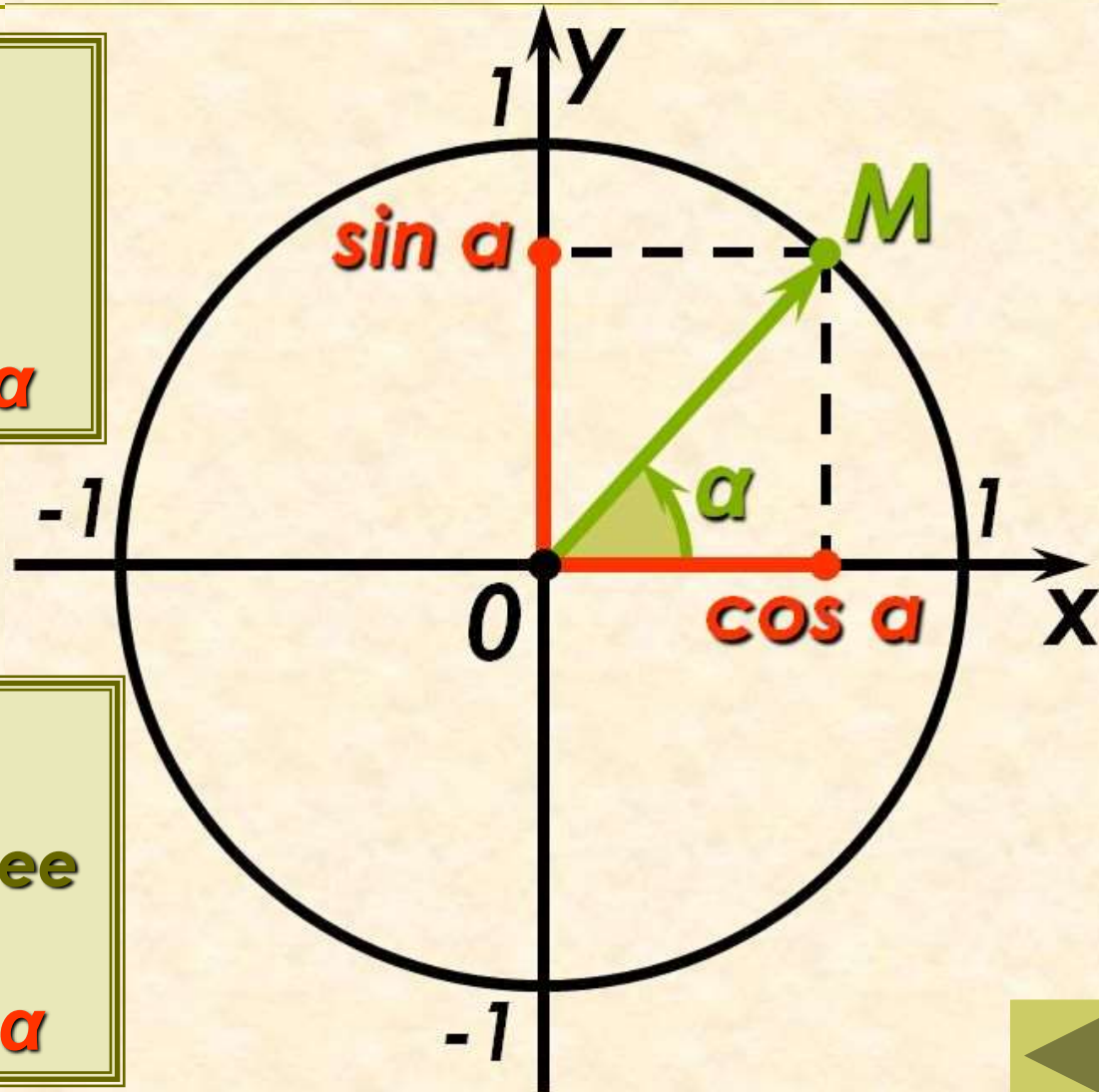
Синус угла α – это число, равное ординате точки единичной окружности, соответствующей углу α . (**$\sin \alpha$**)

Косинус угла α – это число, равное абсциссе точки единичной окружности, соответствующей углу α . (**$\cos \alpha$**)



Определение тангенса и котангенса угла

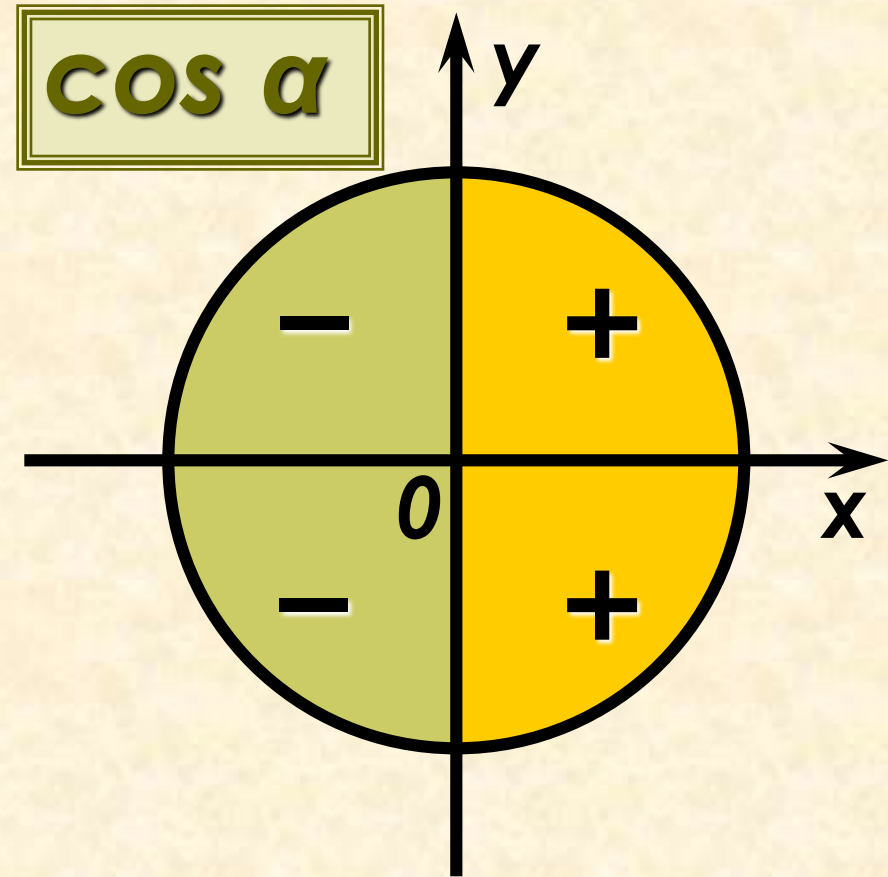
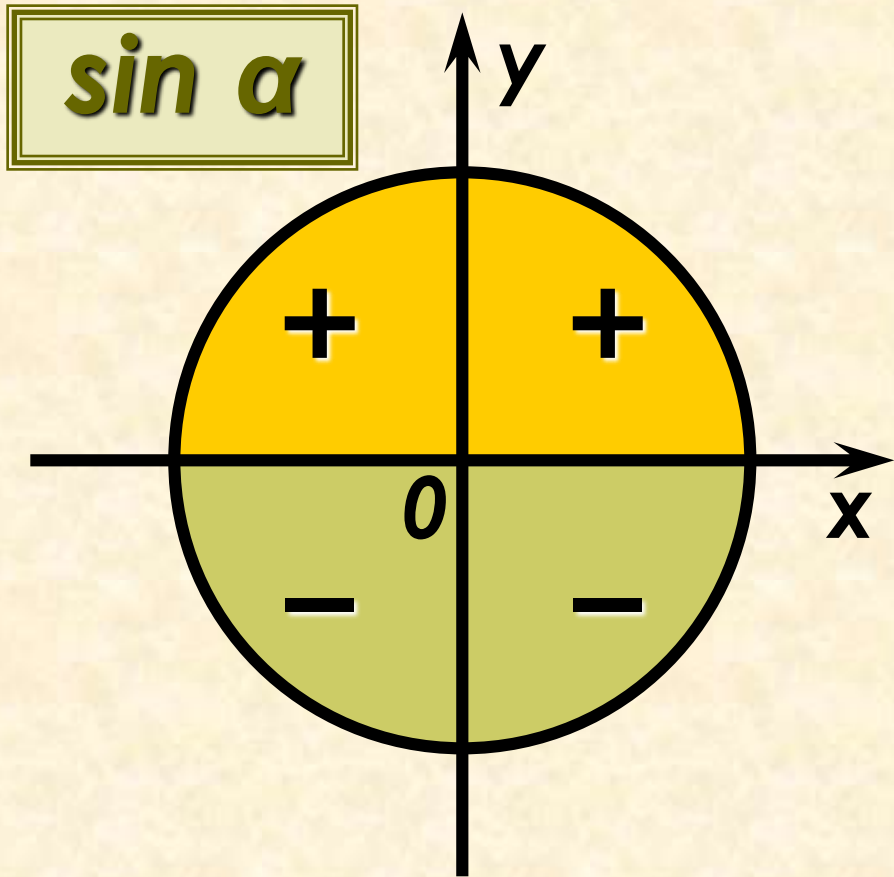
Тангенс угла α – это отношение ординаты точки M к ее абсциссе,
 $\operatorname{tg} \alpha = y/x = \sin \alpha / \cos \alpha$



Котангенс угла α – это отношение абсциссы точки M к ее ординате,
 $\operatorname{ctg} \alpha = x/y = \cos \alpha / \sin \alpha$

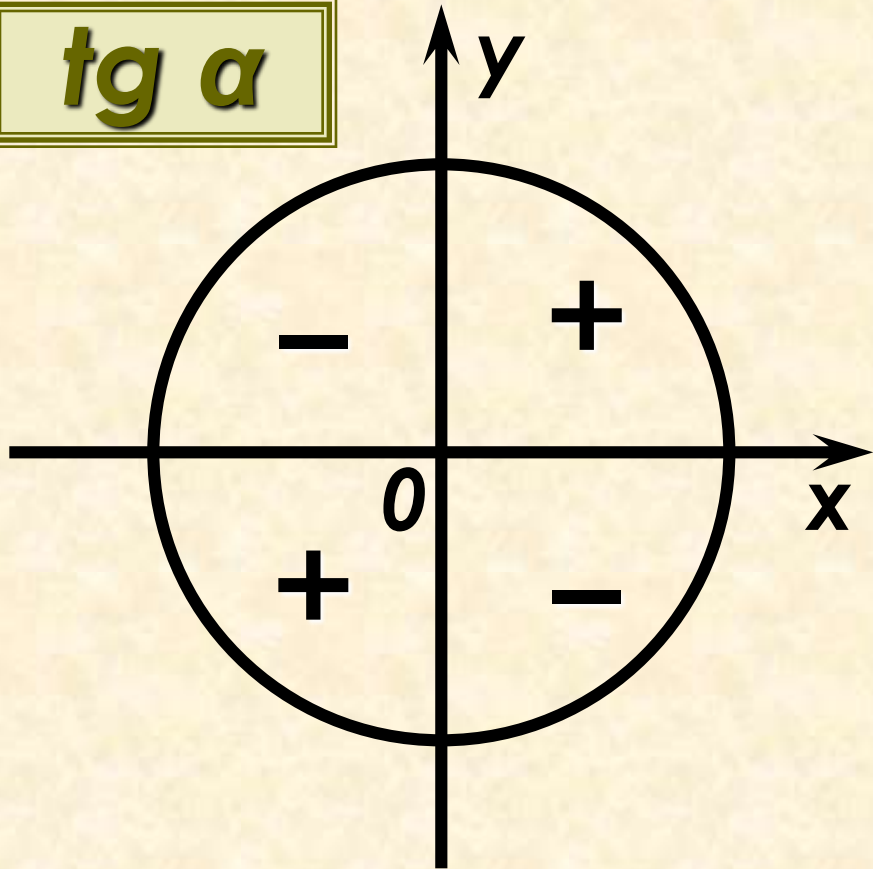


Знаки синуса и косинуса

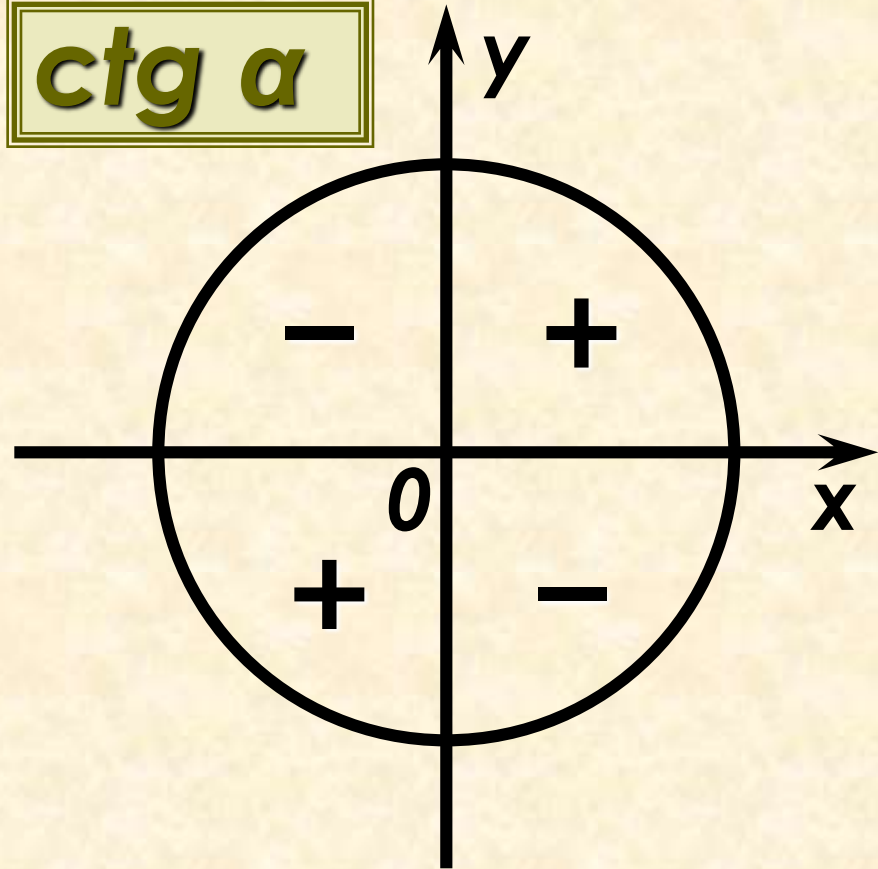


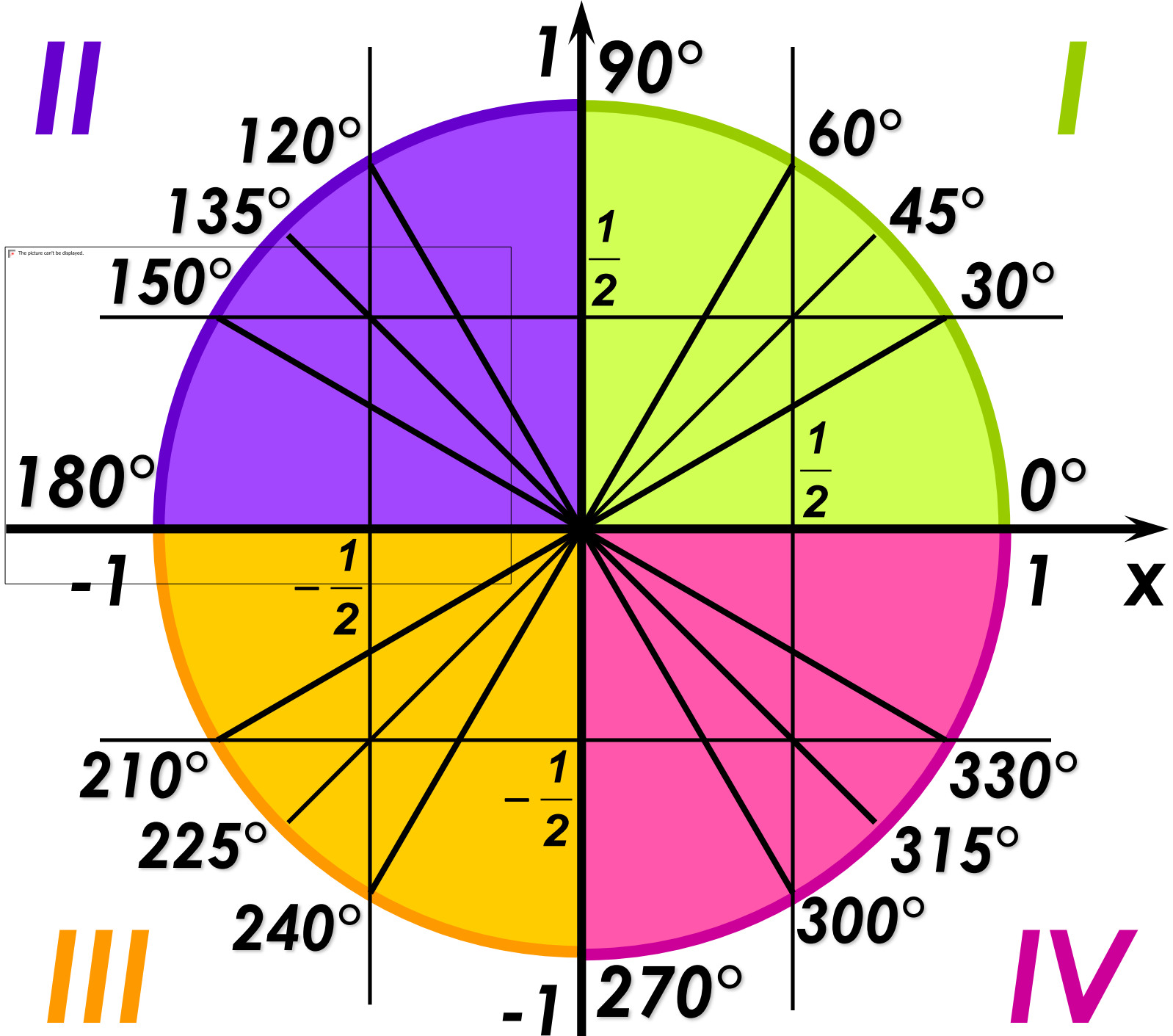
Знаки тангенса и котангенса

$tg \alpha$



$ctg \alpha$



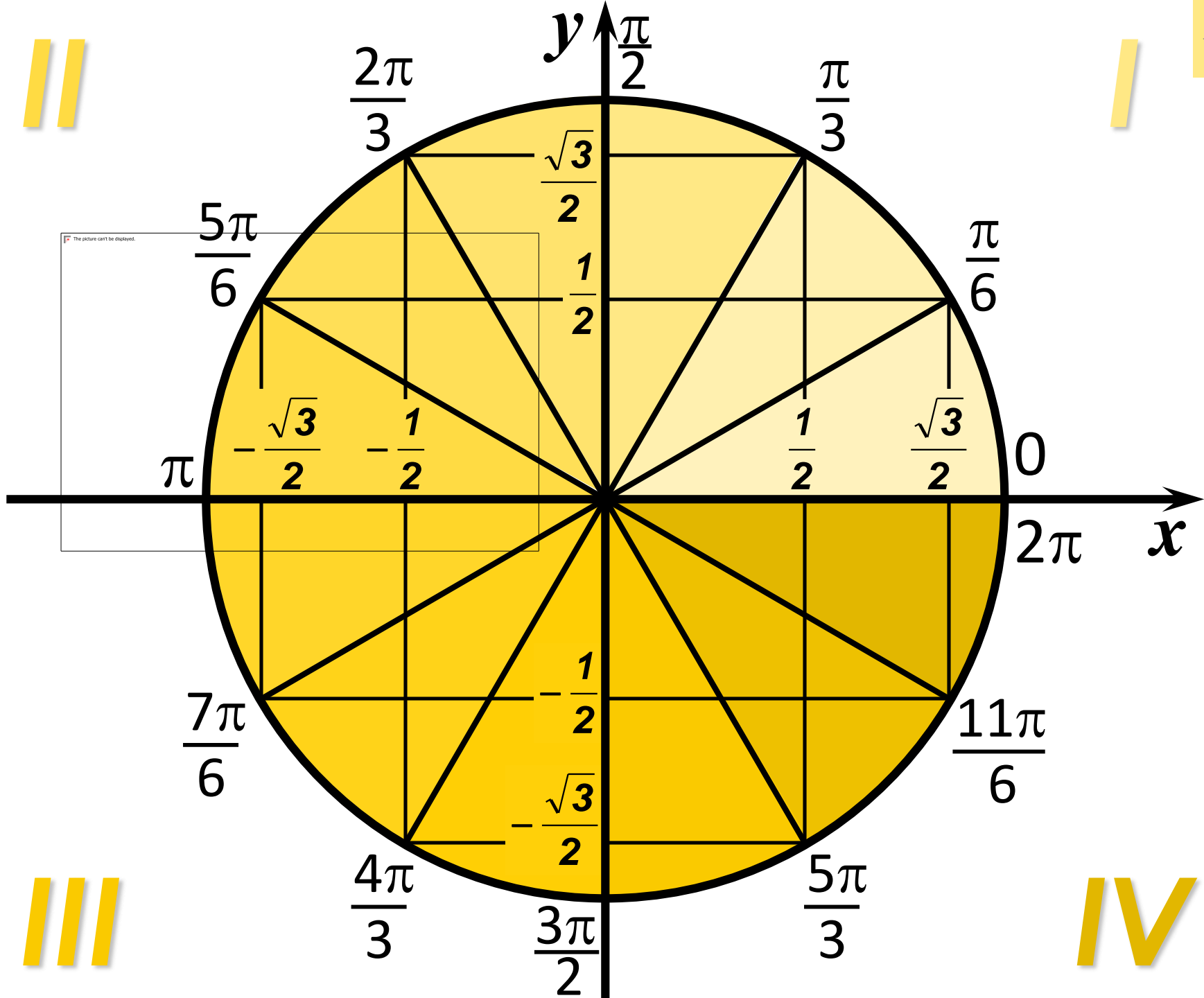


II

I

III

IV



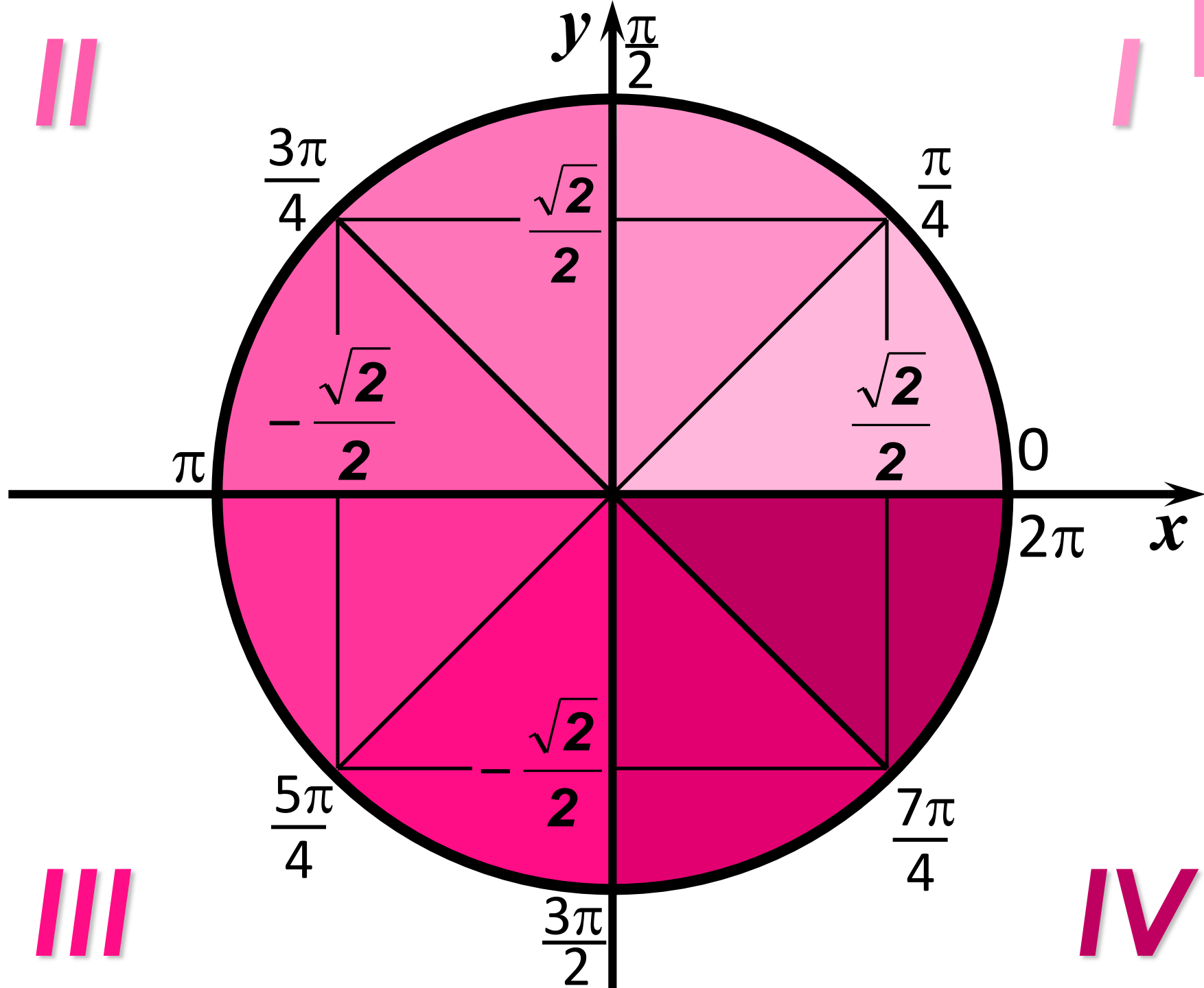


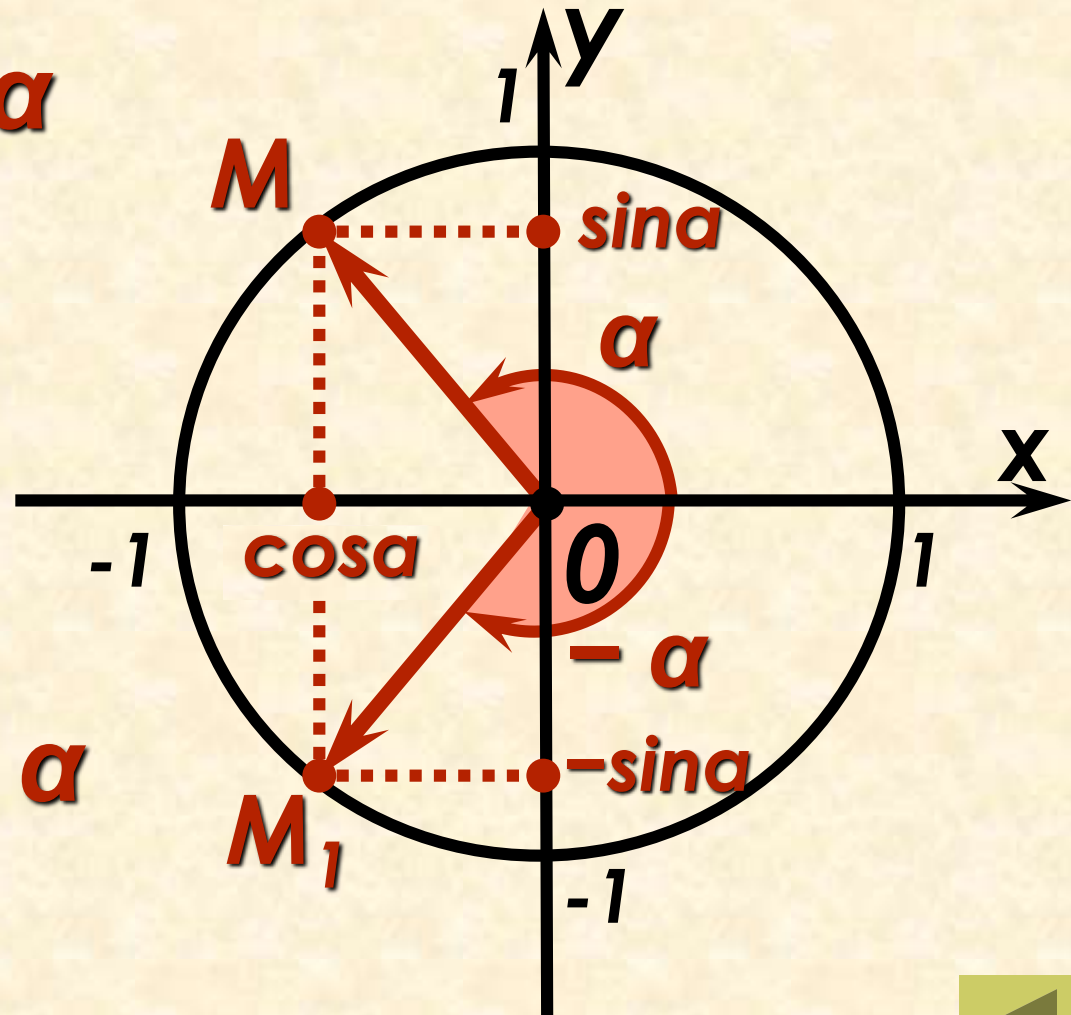
Таблица значений тригонометрических функций

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Свойства четности и нечетности

$\cos(-\alpha) \equiv \cos \alpha$
четная

$\sin(-\alpha) \equiv -\sin \alpha$
нечетная



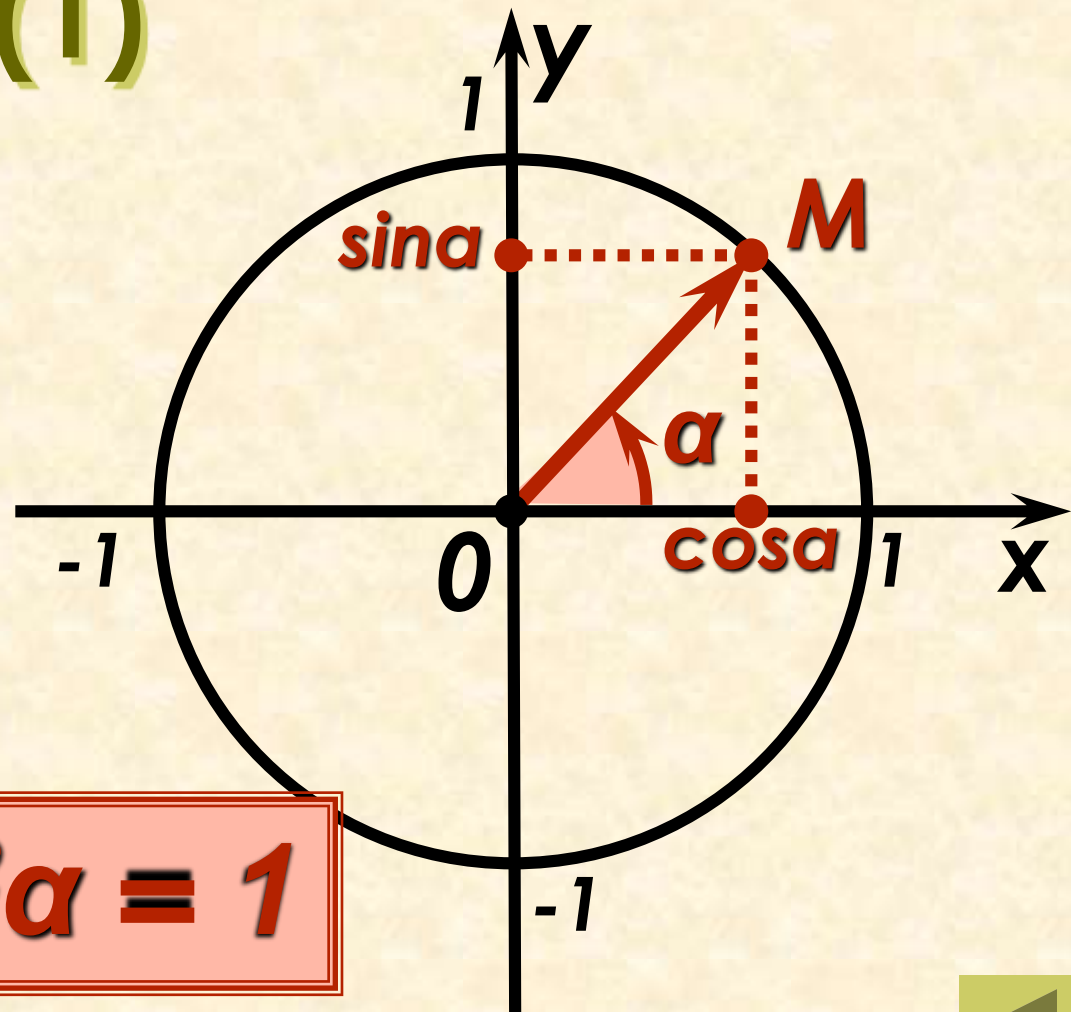
Тригонометрические ТОЖДЕСТВА

- Основное тригонометрическое тождество (1)
- Тригонометрическое тождество (2)
- Тригонометрическое тождество (3)
- Тригонометрическое тождество (4)



Основное тригонометрическое тождество (1)

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Тригонометрическое ТОЖДЕСТВО (2)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad | : \cos^2\alpha$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$



Тригонометрическое ТОЖДЕСТВО (3)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad | : \sin^2\alpha$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$



Тригонометрическое ТОЖДЕСТВО (4)

$$\mathit{tg}\alpha \times \mathit{ctg}\alpha = 1$$

$$\frac{\mathit{sin}\alpha}{\mathit{cos}\alpha} \times \frac{\mathit{cos}\alpha}{\mathit{sin}\alpha} = 1$$

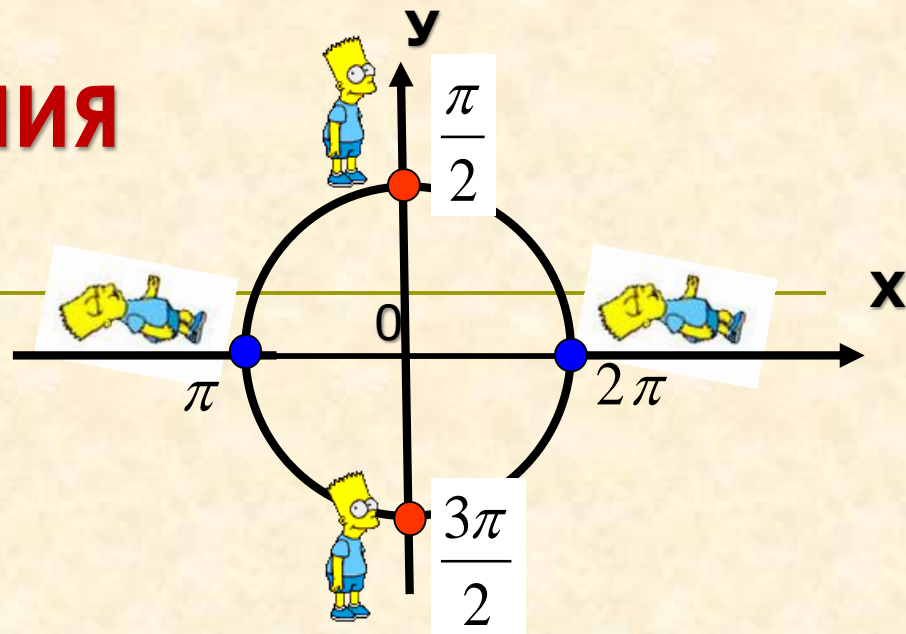


Тригонометрические формулы

- Формулы приведения (правило)
- Формулы приведения (таблица)
- Формулы сложения
- Формулы суммы и разности синусов (косинусов)
- Формулы двойного аргумента
- Формулы половинного аргумента
- Формулы преобразования произведения в сумму



ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ (ПРАВИЛО)



Приведение через

«рабочие» углы:
 $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \dots$



Приведение через

«спящие» углы:
 $\pi; 2\pi; 3\pi; \dots$



**Название
функции**

**Меняется на
конфункцию**

Не меняется

Знак

**Определяется по знаку функции в
левой части формулы**

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ (таблица)

α	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$



Формулы сложения

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$



Формулы суммы и разности

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Формулы суммы и разности

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \\ \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.\end{aligned}$$



Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$



Формулы половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$



Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

